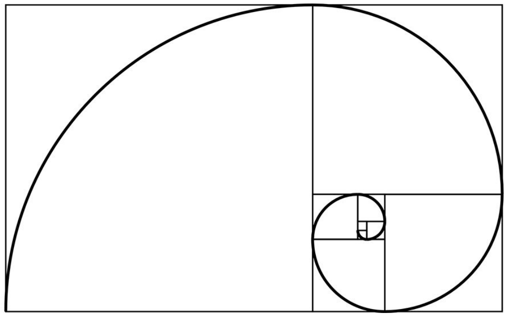
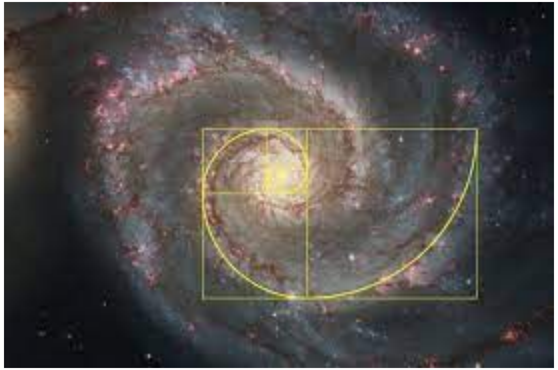
La sezione aurea e la sequenza di Fibonacci

Vittoria Filipuzzi, Mattia Guerrato

Spirale aurea



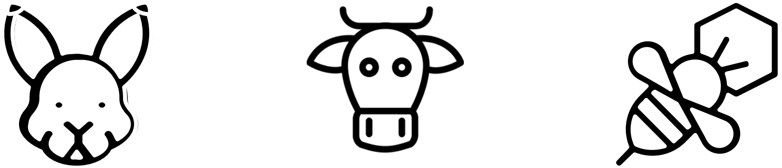


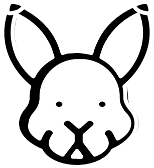
Relazione fra numero aureo e serie di Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

1/1=1
2/1=2
3/2=1,5
5/3=1,666…
8/5=1,6
13/8=1,625
21/13=1.615348…
34/21=1,61904
55/34=1,61764
89/55=1.61818
144/89=1,61798
Φ =1,6180339887…

Relazione fra la sequenza di Fibonacci e gli animali

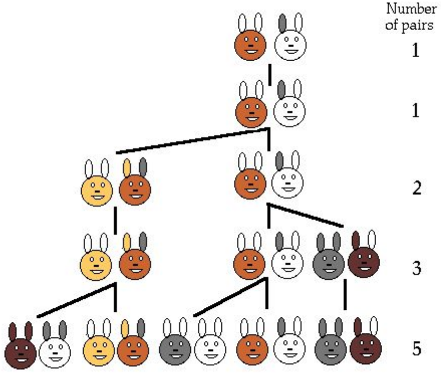




Conigli

Il problema originale che Fibonacci indagò (1202) riguardava la velocità con cui i conigli potevano riprodursi in circostanze ideali:

- I conigli non muoiono mai.
- La femmina produce sempre una nuova coppia (un maschio e una femmina) ogni mese a partire dal secondo mese.



MESI	COPPIE
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233

Il problema dei conigli non è molto realistico, vero?

Le mucche di Dudeney

L'enigmista inglese Henry E. Dudeney (1857-1930) adatta i Conigli di Fibonacci alle mucche, rendendo il problema più realistico.

Cambia i mesi in anni e i conigli in tori (maschio) e mucche (femmine)

Api e alberi genealogici

Tutte le femmine nascono quando la regina si è accoppiata con un maschio e quindi hanno due genitori.

Colonia di api

1

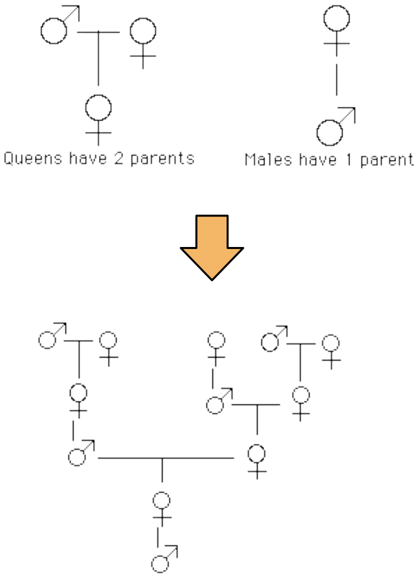
Regina
In una colonia di api c’è una femmina speciale

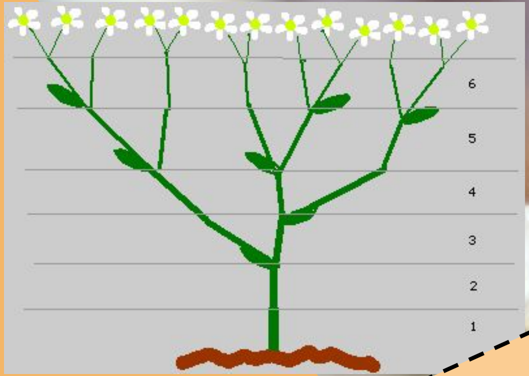
2

Operaie
Altre api femmine che, a differenza della regina, non producono uova

3

Droni
Api maschi che non lavorano. Sono prodotti dalle uova non fecondate della regina, quindi hanno solo una madre ma nessun padre





Achillea Ptarmica

Fiori, frutti e foglie

- Ranuncoli: 5 petali
- Gigli: 3 petali
- Calendule: 34 petali
- Margherite: 21, 34, 55, 89 petali

Passiflora

5 foglie

3 sepali

5 foglie più chiare

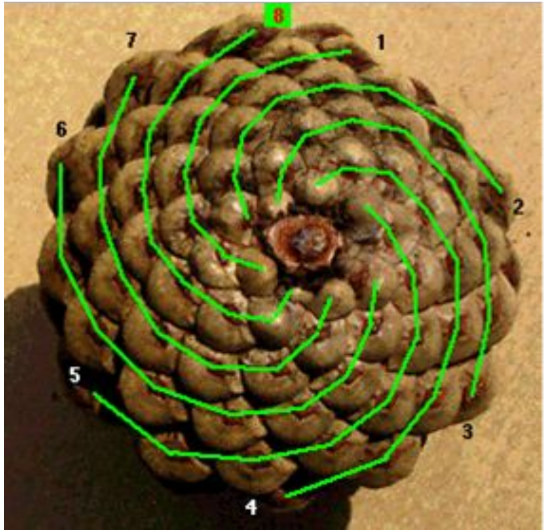
stami viola e bianchi

3 carpelli di colore marrone

5 stami verdastri

Fibonacci nei fiori

Contando il numero di spirali che ci sono nel capolino ne possiamo trovare 55 o 34. Che sono dei numeri della serie di Fibonacci.
La ragione per cui sono disposti in spirali è perché sono in una posizione ottimale. Infatti non c'è nessun affollamento al centro e all'esterno non sono troppo sparsi.



... Pigne

Disposizione delle foglie

Se osserviamo una pianta dall'alto, le foglie sono spesso disposte in modo che le foglie sopra non nascondano le foglie sotto.

I numeri di Fibonacci si verificano contando sia il numero di volte in cui giriamo intorno allo stelo, passando di foglia in foglia, sia contando le foglie che incontriamo fino a quando non incontriamo una foglia direttamente sopra quella di partenza.

Ogni foglia è distante 0,618 giri in senso orario dalla precedente (222,5°).

Cavolfiore

Geometria: come trovare la sezione aurea di un segmento

Il segmento AC è la sezione aurea di AB solo se AB:AC=AC:CB

DATI:

- AB= l
- AC= x (deve essere compreso tra 0 e l)
- CB= l-x

CONDIZIONI:

C∈B, AB:AC=AC:CB

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Quindi

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow l(l-x) = x^2 \Rightarrow x^2 + lx - l^2 = 0$$

$$x = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{5}-1)l}{2} = 0{,}62l$$

È accettabile perché è compreso tra 0 e l

Costruzione aurea di un segmento

Riprendiamo la misura della sezione aurea di un segmento e la riscriviamo in un altro modo

$$\frac{(\sqrt{5}-1)l}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}l-\frac{1}{2}l=$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}l^2}-\frac{1}{2}l=\sqrt{l^2+\frac{1}{4}l^2}-\frac{1}{2}l=\sqrt{l^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2}-\frac{1}{2}l$$

L'espressione $\sqrt{l^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2}$ Rappresenta la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente

i due cateti che misura l e 1/2 Quindi la sezione aurea di un segmento l è uguale all'ipotenusa meno il cateto che misura $\frac{l}{2}$

Costruzione

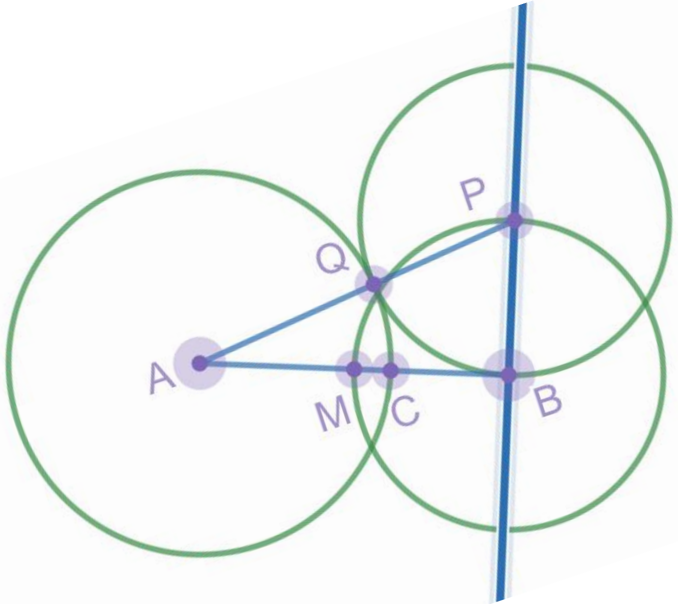
1. Prendiamo un segmento AB e tracciamo una retta r perpendicolare ad AB e passante per B

2. Troviamo M il punto medio di AB

3. Con centro in B tracciamo la circonferenza che passa per M e con P indichiamo il punto di intersezione che ha con la retta r

4. Con centro in P tracciamo la circonferenza che passa per B e indichiamo con Q il punto di intersezione con il segmento AP

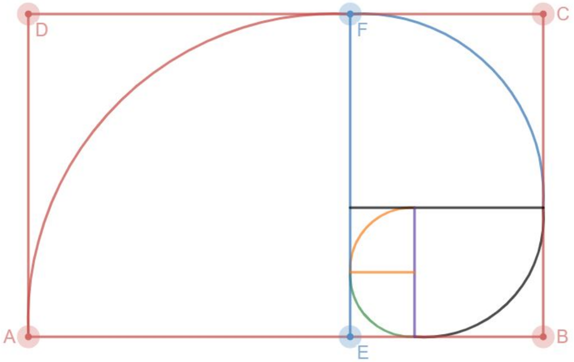
5. Con centro in A tracciamo la circonferenza che passa per Q e indichiamo con C il punto di intersezione che ha con il segmento AB



Quindi AC è la sezione aurea di AB

Il rettangolo aureo

Si chiama rettangolo aureo il rettangolo avente un lato congruente alla sezione aurea dell’altro.



Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza si ottiene una curva a forma di spirale, detta spirale logaritmica, o anche “spirale d’oro”.

Il triangolo aureo

Si chiama triangolo aureo un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36°. Gli angoli alla base di tale triangolo sono di 72°.

In tale triangolo la bisettrice di uno degli angoli alla base divide il lato opposto in due segmenti, tali che quello contenente il vertice del triangolo è la parte aurea del lato obliquo.

Infatti, per il teorema della bisettrice:

AP:OP=AB:OB

D'altra parte:

AB≅BP≅OP perché ABP e BPO sono isosceli

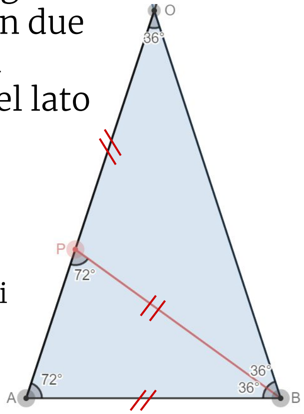
OB≅OA perché ABO è isoscele

Quindi:

AP:OP=OP:OA

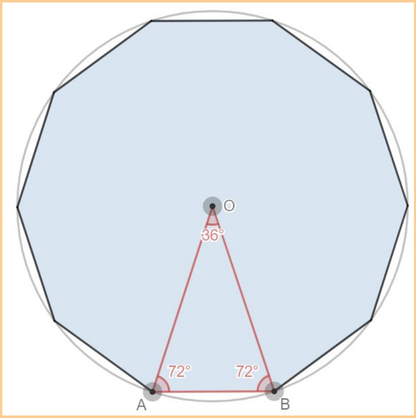
Dunque OP è la sezione aurea del lato obliquo OA.

Poiché OP≅AB, concludiamo che, in un triangolo isoscele in cui l'angolo al vertice è di 36°, la base è congruente alla sezione aurea del lato obliquo.



Il decagono regolare

In un decagono regolare, il lato è congruente alla sezione aurea del raggio perché tracciando i raggi dal centro ai vertici del poligono, si formano triangoli isosceli aurei. Di conseguenza, detta ℓ_{10} la misura del lato di un decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r, avremo che:



$$l_{10} = \frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Il triangolo aureo e il pentagono regolare

Disegniamo un pentagono regolare ABCDE e tracciamo tutte le sue diagonali, tracciamo anche la circonferenza circoscritta al pentagono e osserviamo che le diagonali dividono ciascun angolo interno del pentagono in tre angoli che insistono su archi congruenti.
Ricaviamo così le ampiezze degli angoli (poiché sappiamo che la somma degli angoli interni di un pentagono è 108).

Il triangolo ACE è aureo, quindi AE è congruente alla sezione aurea di AC.

⇓

In un pentagono regolare, il lato è congruente alla sezione aurea delle diagonali.

Anche il triangolo FCB è aureo; da ciò si deduce che FB è congruente alla sezione aurea di FC. Ma FA ≅ FB, quindi FA è congruente alla sezione aurea di FC.

⇓

In un pentagono regolare, due diagonali si dividono in segmenti tali che il minore è congruente alla sezione aurea del maggiore.